INSTITUT SUPERIEUR DE GESTION 1983

MATHÉMATIQUES I

(4 h)

Option économique

PREMIER PROBLEME

Soit E le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des fonctions réelles indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Pour tout élément L de $\mathcal{L}(E)$ et tout élément f de E, on notera Lf l'image de f par L et $(Lf)(x)$ l'image du réel x par la fonction Lf.

On posera par définition $L^0 = Id_E$ et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ $L^i = L \circ L^{i-1}$.

On notera D l'élément de $\mathcal{L}(E)$ qui à tout f de E associe la dérivée f' de f.

Pour tout réel α, on désignera par L_α l'élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $f \in E$ et tout $x \in \mathbb{R}$ on ait :

$$(L_\alpha f)(x) = e^{\alpha x} f(x)$$

et on pourra noter l_α l'élément de E qui à tout réel x associe le réel $e^{\alpha x}$.

On appelle opérateur de dérivation tout élément A de $\mathcal{L}(E)$ pouvant se décomposer sous la forme

$$A = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \qquad \text{où} \qquad \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ a_i \in \mathbb{R} \end{cases}$$

A une telle décomposition est associée la fonction polynôme ordinaire P_A définie par $P_A(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit l'élément de $\mathcal{L}(E)$ $K = D^3 + 3D^2 - 9D + 5Id_E$

On se propose de déterminer le noyau $\hat{K}$ de K.

1° Il est clair que si A et B sont deux opérateurs de dérivation tels qu'il puisse leur être associés deux polynômes P_A et P_B identiques, A et B sont égaux.

Mais rien n'indique *a priori* qu'un opérateur de dérivation A n'ait qu'une seule décomposition suivant les D^i.

Démontrer que $A = B \Rightarrow P_A = P_B$

On pourra pour cela utiliser les fonctions l_x.

2° Démontrer que, si A et B sont deux opérateurs de dérivation quelconques,

a. $P_{A+B} = P_A + P_B$

b. $P_{A \circ B} = P_A P_B$

c. $P_{\lambda A} = \lambda P_A$ où $\lambda \in \mathbb{R}$

Ainsi l'addition, la composition et la multiplication par un réel des opérateurs de dérivation sont identiques à l'addition, la multiplication et la multiplication par un réel des polynômes, et en ont donc les propriétés.

3° Décomposer P_K en produit de deux polynômes v et w premiers entre eux, de degrés respectifs 2 et 1.

4° Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel α on a :

$$(D - \alpha Id_E)^n = L_\alpha \circ D^n \circ L_{-\alpha}$$

5° Soient V et W les opérateurs de dérivation définis par

$$P_V = v \qquad \text{et} \qquad P_W = w$$

Déduire de la question précédente, les noyaux $\hat{V}$ et $\hat{W}$ de V et de W.

De chacun d'eux, on donnera une base aussi simple que possible.

6° *a.* Montrer que $\hat{V} + \hat{W} \subset \hat{K}$

b. Montrer que $\hat{K} = \hat{V} \oplus \hat{W}$ (utiliser 3°).

On a ainsi résolu l'équation différentielle : $y''' + 3y'' - 9y' + 5y = 0$

.../...

DEUXIEME PROBLEME

Soit f une fonction continue, strictement positive sur un intervalle fermé $[a, b]$ $(a < b)$.

→ Soit M la valeur maximale de f sur $[a, b]$ et x_0 un point de $[a, b]$ tel que $f(x_0) = M$.

1° Justifier la vraisemblance de la phrase précédée de →.

2° Pour tout $\varepsilon > 0$, justifier l'existence d'un intervalle fermé $I_\alpha \subset [a, b]$, de diamètre $\alpha > 0$, contenant x_0 et tel que

$$x \in I_\alpha \Rightarrow M - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant M$$

3° En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a alors :

$$\int_a^b [f(x)]^n \, dx \geqslant \alpha (M - \varepsilon)^n$$

4° Montrer que

$$\int_a^b [f(x)]^n \, dx \leqslant (b - a) M^n$$

5° Déduire des questions précédentes que

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{b - a} \int_a^b [f(x)]^n \, dx \right]^{\frac{1}{n}} = M$$

6° Soit m la valeur minimale de f sur $[a, b]$. Montrer que :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{b - a} \int_a^b [f(x)]^{-n} \, dx \right]^{\frac{-1}{n}} = m$$

7° Soient a et b deux réels quelconques avec $a < b$. En utilisant les résultats 5° et 6°, discuter suivant les valeurs de a et de b la convergence des séries de termes généraux

$$u_n = \frac{e^{nb} - e^{na}}{n (b - a)}$$

et

$$v_n = \frac{n (b - a)}{e^{-na} - e^{-nb}}$$

TROISIEME PROBLEME

Une entreprise utilise une série d'appareils identiques. Chacun d'eux doit être remplacé dès qu'il tombe en panne, par un appareil neuf.

On note $q(t)$ la probabilité pour qu'un appareil neuf mis en service à l'instant t_0 soit encore en état de marche à l'instant $t_0 + t$.

Le temps étant exprimé en jours, on admet que

$$q(t) = \sqrt{4 - \left(\frac{t}{100}\right)^2} - 1$$

ou, plus exactement, que cette loi est un modèle suffisamment approché d'une réalité statistique observée sur un « échantillon représentatif », ce qui veut dire que si tous les appareils de l'échantillon ont été mis en service à l'instant t_0, $q(t)$ représente, à une différence négligeable près, la proportion d'appareils encore en état de marche à l'instant $t_0 + t$ la borne supérieure θ de l'intervalle de définition de q étant la durée maximale de survie d'un appareil.

1° Étudier sur $\mathbb{R}^+$ la fonction réelle $t \to q(t)$.

. . . / . . .

2° On subdivise l'intervalle $[0, \theta]$ en n intervalles I_k consécutifs, de même longueur $\Delta t = \frac{\theta}{n}$ et tels que

$$I_k = [(k-1)\,\Delta t,\ k\,\Delta t] \qquad \text{pour} \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Déterminer la probabilité p_k pour qu'un appareil donné, mis en service à l'instant 0, tombe en panne au cours de la période définie par I_k.

3° Soit T la durée de vie moyenne des appareils, et t_k la durée de vie moyenne des appareils mis en service à l'instant 0 qui tombent en panne au cours de la période définie par I_k.

Montrer que $t_k \in I_k$ et en déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} (k-1)\,\Delta t\, p_k \leqslant T \leqslant \sum_{k=1}^{n} k\,\Delta t \circ p_k$$

4° En déduire que

$$T = \int_0^{\theta} q(t)\,dt$$

et calculer T.

5° Exprimer, au moyen d'une intégrale, la probabilité $f(t)$ pour qu'un appareil donné soit remplacé une fois et une seule au cours de la période $[0, t]$, où $0 \leqslant t \leqslant \theta$.

QUATRIEME PROBLEME

Soit $\mathcal{A}$ le $\mathbb{R}$ – espace vectoriel des polynômes à une indéterminée et à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2 et φ l'application de $\mathcal{A}$ dans lui-même définie par :

$$(\varphi P)(x) = P(x-1) + P(x+1) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

1° Montrer que φ est un automorphisme de $\mathcal{A}$.

2° Montrer que φ ne possède qu'une seule valeur propre et donner une base de l'espace propre associé.

3° Soit M la matrice de φ relativement à la base ordonnée $(1, X, X^2)$.

a. M est elle diagonalisable?

b. Calculer M^{-1}.

4° *a.* Soit P un élément quelconque de $\mathcal{A}$.

Montrer qu'il existe un et un seul élément Q de $\mathcal{A}$ tel que

$$P(x) = Q(x-1) + Q(x+1) \qquad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}$$

b. Déterminer le polynôme Q lorsque :

$$P(x) = 12x^2 - 7x + 5$$

5° *a.* Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $P \in \mathcal{A}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\varphi^n P)(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}\, P(x - n + 2k)$$

(préciser $\alpha_{n,k}$)

b. Déterminer le polynôme R_n tel que :

$$(\varphi^n R_n)(x) = x^2 + 2x + 3$$

FIN